УДК 517.9

О ПОТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

©И. И. Скрыпник

Изучение усреднений и регулярности граничной точки для нелинейных параболических граничных задач основывается на точных априорных оценках решений некоторых модельных граничных задач.

В работах [1,2,3] развит метод получения поточечных оценок решений модельных эллиптических задач для произвольного $m > 1$ и для решений модельных параболических задач для $m = 2$.

Данная статья посвящена развитию метода получения поточечных оценок для решений модельных параболических задач для любого m, а также для решений задачи фильтрации.

1. Сформулируем предположения и основные результаты работы.

Пусть $B(R)$ - шар радиуса R с центром в нуле в R^n. E - замкнутое множество, содержащееся в $B(d)$, $d < \min\{1, \frac{R}{8}\}$. Пусть $\Omega = B(R)\setminus E$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $S = \partial\Omega \times (0,T)$. Определим функцию $u(x,t,k)$, как решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,\frac{\partial u}{\partial x}) = 0, \ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t) = k \cdot f(x), \ (x,t) \in S, \tag{2}$$

$$u(x,0) = k \cdot f(x), \ x \in \Omega, \tag{3}$$

Здесь $k \in R^1$, $f(x)$ - функция из $\overset{\circ}{W}{}^1_m(\Omega)$, равная единице на E. Предполагается далее, что $a_i(x,t,p)$, $i = 1,...,n$ определены при $(x,t) \in Q$, $p \in R^n$ и удовлетворяют условиям:

а) функции $a_i(x,t,p)$ непрерывны по p для почти всех x,t, измеримы по x,t для любого p; $a_i(x,t,0) \equiv 0$ при $(x,t) \in Q$, $i = 1,...,n$;

б) с некоторыми положительными постоянными ν_1, ν_2 выполнены неравенства

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,p)p_i \geq \nu_1 \cdot (1+|p|)^{m-2} \cdot |p|^2, \\ |a_i(x,t,p)| \leq \nu_2 \cdot (1+|p|)^{m-2} \cdot |p|, \ i = 1,...,n.\end{gathered} \tag{4}$$

При сформулированных предположениях просто доказывается разрешимость задачи (1),(2),(3) в пространстве $V_{2,m}(Q)$. Под $V_{2,m}(Q)$ понимаем пространство функций $u(x,t)$, полученное замыканием на норме

$$||u||_{2,m,Q} = \underset{0<t<T}{\mathrm{vraimax}} (\int_\Omega u^2(x,t)dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x}|^m dxdt)^{\frac{1}{m}},$$

всех гладких функций.

Под решением задачи (1),(2),(3) понимаем функцию $u(x,t,k) \in kf(x) + \overset{\circ}{V}_{2,m}(Q)$, такую, что при любых $\psi(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{2,m}(Q)$, $\tau \in (0,T)$ справедливо интегральное тождество

$$\int_\Omega u(x,\tau,k)\psi(x,\tau)dx - k \cdot \int_\Omega f(x)\psi(x,0)dx + \\ + \int_0^\tau \int_\Omega \{-u(x,t,k) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\}dxdt = 0. \tag{5}$$

Определим также функцию $v(x,t,k)$, как решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v^m = 0, \ (x,t) \in Q \tag{6}$$

удовлетворяющей (2),(3).
Под решением задачи (6),(2),(3) понимаем функцию $v(x,t,k) \in kf(x) + \overset{\circ}{V}(Q)$ такую, что при любых $\psi(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$, $\tau \in (0,T)$ справедливо интегральное тождество

$$\int_\Omega v(x,\tau,k)\psi(x,\tau)dx - k\cdot\int_\Omega f(x)\psi(x,0)dx + \\ + \int_0^\tau\int_\Omega\{-\frac{\partial\psi}{\partial t}\cdot v(x,t,k) + \sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}v^m\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\}dxdt = 0. \tag{7}$$

Здесь $V(Q)$ - пространство функций $u(x,t)$, полученное замыканием по норме

$$\|u\|_Q^2 = \underset{0<t<T}{\text{vraimax}}\int_\Omega u^2(x,t)dx + \{\int_Q|\frac{\partial}{\partial x}u^m|^2dxdt\}^{\frac{1}{m}}$$

всех гладких функций.
Отметим интегральное тождество

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega\{\frac{\partial}{\partial t}u_h(x,t)\cdot\psi(x,t) + \sum_{i=1}^n\big[\frac{\partial}{\partial x_i}u^m(x,t)\big]_h\cdot\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_i}\}dxdt = 0, \tag{8}$$

справедливое при $h>0$, $0<t_1<T-h$ для произвольной функции $\psi(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_{t_1})$. В (8) использовано обозначение

$$g_h(x,t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h}g(x,s)ds.$$

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует постоянная K_1, зависящая от n, m, ν_1, ν_2, T такая, что для решения задачи (1),(2),(3) имеет место оценка*

$$|u(x,t,k)| \le |k|\cdot\min\{1, K_1\cdot\left(\frac{C_m(E)}{|x|^{n-m}}\right)^{\frac{1}{m-1}}\},\ (x,t)\in Q. \tag{9}$$

Теорема 2. *Существует постоянная K_2, зависящая от n, m, ν_1, ν_2, T такая, что для решения задачи (6),(2),(3) имеет место оценка*

$$|v(x,t,k)| \le |k|\cdot\min\{1, K_2\cdot(\frac{C_2(E)}{|x|^{n-2}})^{\frac{1}{m}}\},\ (x,t)\in Q. \tag{10}$$

Под $C_m(E)$ понимаем следующее число

$$C_m(E) = \inf\{\int_{R^n}|\frac{\partial\phi}{\partial x}|^m dx,\ \ \phi(x)\in\mathcal{M}(E)\},$$

где $\mathcal{M}(E) = \{\phi(x)\in C_0^\infty(R^n),\ \ \phi(x)\ge 1,\ \ x\in E\}$.

Замечание 1. Элементарно проверяется, что $0 \le u(x,t,k)\operatorname{sign} k \le k$, $0 \le v(x,t,k)\cdot \operatorname{sign} k \le k$. Поэтому, в доказательстве нуждаются лишь вторые части неравенств (9),(10). В дальнейшем, для простоты, ограничимся случаем $k > 0$.

2. Получение интегральных оценок.

Остановимся на доказательстве оценки (10), для упрощения изложения будем доказывать

$$v(x,t,k) \le K_2 \cdot k \cdot \left(\frac{d}{|x|}\right)^{\frac{n-2}{m}}, \quad (x,t) \in Q. \tag{11}$$

Определим $m_r = \operatorname*{vraimax}_{|x|=r, t\in(0,T)} v(x,t,k)$,

$$v_r(x,t,k) = \max\{v(x,t,k) - m_r, 0\}, \quad E_r = \{(x,t) \in Q : v(x,t,k) > m_r\}.$$

Легко проверяется включение $E_r \subset \overline{B(r)\setminus E} \times (0,T)$.
Зафиксируем в дальнейшем функцию $\lambda(t) \in C^\infty(R^1)$, равную единице при $|t| \le \frac{1}{2}$, нулю при $|t| \ge 1$, удовлетворяющую условиям $\operatorname{sign} t \cdot \lambda'(t) \le 0$, $|\lambda'(t)| \le 2$, $0 \le \lambda(t) \le 1$. Пусть $\lambda_s(t) = \lambda(\frac{t}{s})$ для $s > 0$.

Далее $\phi(y)$ - бесконечно дифференцируемая функция на R^1, равная единице при $y \le 1$, нулю при $y \ge 2$ и такая, что $0 \le \phi(y) \le 1$, $|\phi'(y)| \le 2$. Обозначим $\phi_d(x) = \phi(\frac{|x|}{d})$. В дальнейшем через $C^{(i)}$, K_i, $i = 1,2,...$, будем обозначать постоянные, зависящие лишь от T, R, n, m.

Замечание 2. В дальнейшем будем рассматривать случай $m_r < k-1$. В противном случае $v(x,t,k) \ge k-1$, если $(x,t) \in E_r$ и можно аналогично доказательству теоремы 1 работы [3] получить оценку

$$|v(x,t,k)| \le |k| \cdot \min\left\{1, K_2 \cdot \left(\frac{d}{|x|}\right)^{n-2}\right\}.$$

Обозначим при $r \in (d,R]$, $\tau \in [0,T]$, $s \in (0,T]$,

$$N(s) = m + (m-1)\log_2 \frac{T}{s}$$

$$I_r(s,\tau) = \frac{1}{N(s)+1} \operatorname*{vraimax}_{0\le t\le T} \int_\Omega u_r^{N(s)+1}(x,t) \cdot \lambda_s^2(t-\tau)dx +$$
$$+ N(s) \int_{E_r} u^{m-1}(x,t) \cdot u_r^{N(s)-1}(x,t) \cdot \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 \cdot \lambda_s^2(t-\tau)dxdt. \tag{12}$$

Будет доказана

Теорема 3. *Существуют такие постоянные K_3, K_4, что при*

$$2d \le r \le R, \quad K_3 r^2 \le s \le T, \quad 0 \le \tau \le T \tag{13}$$

для решения задачи (2),(3),(6) выполнена оценка

$$I_r(s,\tau) \le K_2 \cdot s \cdot (k - m_r)^{N(s)} d^{n-2}. \tag{14}$$

Вначале докажем несколько лемм.

Лемма 1. Существуют постоянные $c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}$ такие, что имеют место оценки

$$\operatorname*{vraimax}_{0\le t\le T}\int_\Omega u^{m+1}(x,t)dx+\int_\Omega u^{2(m-1)}(x,t)|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|^2\,dx\,dt\le \le c^{(1)}\cdot k^{m+1}(1+k^{m-1})d^{n-2}. \tag{15}$$

$$\operatorname*{vraimax}_{0\le t\le T}\int_\Omega u_r^{m+1}(x,t)dx+\int_{E_r} u^{m-1}(x,t)\cdot u_r^{m-1}(x,t)\cdot|\frac{\partial u}{\partial x}|^2\,dx\,dt\le \le c^{(2)}\cdot k\cdot(1+k^{m-1})(k-m_r)^m d^{n-2}. \tag{16}$$

$$\int_Q|\frac{\partial u^m}{\partial x}|^2\cdot\phi_d^2(x)\cdot\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt\le c^{(3)}\cdot sk^2(1+k^{2m-2})d^{n-2}. \tag{17}$$

при $r\in(2d,R],\ s\in[d^2,T],\ \tau\in(0,T]$.

Неравенства (15),(16),(17) получаются при подстановке в интегральное тождество (8) функций

$$\psi(x,t)=u_h^m(x,t)-k^m\cdot g^m(x),$$
$$\psi(x,t)=[u_h-m_r]_+^m-(k-m_r)^m\cdot g^m(x),$$
$$\psi(x,t)=u_h^m(x,t)\cdot\phi_d^2(x)\cdot\lambda_s^2(t-\tau)-k^m\cdot\phi_d^2(x)\cdot\lambda_s^2(t-\tau).$$

соответственно, переходя к пределу при $h\to 0$. Здесь $g(x)$ - бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $|x|\le d$, нулю при $|x|\ge 2d$.

Лемма 2. Пусть при некоторых $r\in[2d,R],\ s'\in(2r^2,T],\ \tau\in(0,T]$ имеет место неравенство

$$I_r(s',\tau)\le K\cdot s'\cdot k\cdot(k-m_r)^{N(s')}\,d^{n-2}. \tag{18}$$

Тогда при $s=\frac{s'}{2}$, справедлива оценка

$$I_r(s,\tau)\le c^{(4)}\cdot\{s+K\cdot\frac{r^2}{s}\cdot s'\}\cdot k\cdot(k-m_r)^{N(s)}d^{n-2}. \tag{19}$$

Доказательство. Подставим в (8) функцию

$$\psi(x,t)=[u_h(x,t)-m_r]_+^{N(s)}\cdot\lambda_s^2(t-\tau)-(k-m_r)^{N(s)}\,\phi_d^2(x)\,\lambda_s^2(t-\tau).$$

Переходя к пределу при $h\to 0$, получаем

$$\frac{1}{N(s)+1}\int_\Omega u_r^{N(s)+1}(x,t)\lambda_s^2(t-\tau)dx|_0^{t_1}-(k-m_r)^{N(s)}\int_\Omega u(x,t)\phi_d^2(x)\lambda_s^2(t-\tau)dx|_0^{t_1}$$
$$-2\int_{Q_{t_1}}\{\frac{1}{N(s)+1}u_r^{N(s)+1}-(k-m_r)^{N(s)}u(x,t)\,\phi_d^2(x)\}\,\lambda_s(t-\tau)\frac{d}{dt}\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt+$$
$$+N(s)\int_{E_r}u^{m-1}(x,t)\,u_r^{N(s)-1}(x,t)\,|\frac{\partial u}{\partial x}|^2\,\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt\le$$
$$\le c_1(k-m_r)^{N(s)}\int_{Q_{t_1}}u^{m-1}(x,t)\,\phi_d(x)|\frac{\partial u}{\partial x}||\frac{d\,\phi_d(x)}{dx}|\,\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt. \tag{20}$$

Используя неравенство (17) для оценки правой части (20) и условия на $\phi_d(x)$, $\lambda_s(t-\tau)$, из (20) получаем

$$I_r(s,\tau)\le c_2\,\{k\cdot(k-m_r)^{N(s)}s\,d^{n-2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{N(s)+1}\int_{E_r}u_r^{N(s)+1}(x,t)\cdot\lambda_{2s}^2(t-\tau)\,dx\,dt\}. \tag{21}$$

Интеграл в правой части (21) оцениваем по неравенству Пуанкаре, используя замечание 2, определение $N(s)$ и оценку (18), получаем (19).

Доказательство теоремы 2. Покажем, что K_3, K_4 можно представить в виде

$$K_3 = K_4 + 1, \quad K_4 = 2\max\{\frac{c^{(2)}}{T}, 2c^{(4)}\} \tag{22}$$

где $c^{(2)}$, $c^{(4)}$ - постоянные из лемм 1,2.

Определим конечную последовательность $s_j = 2^{-j+1}\cdot T$, $j = 1,\dots,J$ с J, удовлетворяющим условию $2^{-J}\cdot T < K_3 r^2 \le 2^{-J+1}\cdot T$.
Докажем оценки

$$I_r(s_j,\tau) \le \frac{1}{2}K_4\, s_j\,(k-m_r)^{N(s_j)}\,d^{n-2}, \quad j = 1,\dots,J \tag{23}$$

При $j=1$, (23) следует из (16). Пусть (23) справедливо для $1 \le j \le j_0 - 1$. Покажем его при $j = j_0$. Воспользуемся неравенством (19) из леммы 2, получим

$$I_r(s_{j_0},\tau) \le c^{(4)}\{s_{j_0} + \frac{K_4}{2}\frac{r^2}{s_{j_0}}s_{j_0-1}\}\,k\,(k-m_r)^{N(s_{j_0})}\,d^{n-2} \le$$

$$\le c^{(4)}\cdot s_{j_0}\{1+\frac{K_4}{K_3}\}\,k\,(k-m_r)^{N(s_{j_0})}\,d^{n-2} \le \frac{K_4}{2}\,s_{j_0}\,(k-m_r)^{N(s_{j_0})}\,k\,d^{n-2}. \tag{24}$$

Тем самым (23) получено для всех $1 \le j \le J$. Для произвольного $s \in [K_3 r^2, T]$ определим целое $j(s)$ так, чтобы $2^{-j(s)}T < s \le 2^{-j(s)+1}T$. Тогда

$$I_r(s,\tau) \le \frac{K_4}{2}s_{j(s)}\,k\,(k-m_r)^{N(s_{j(s)})}\,d^{n-2} \le K_4\,s\,k\,(k-m_r)^{N(s)}d^{n-2}.$$

Тем самым теорема 3 доказана.

3. Пусть μ - произвольное число из интервала $(0, k-m_r)$, введем обозначения

$$u_{r,\mu} = \min\{u_r(x,t),\mu\}, \quad E_{r,\mu} = \{(x,t)\in Q:\ 0 \le u_r(x,t) \le \mu\},$$

$$F_{r,\mu} = \{(x,t)\in Q:\ u_r(x,t) > \mu\},$$

$$I_{r,\mu}(s,\tau) = \int_{E_{r,\mu}} u^{m-1}(x,t)\,u_r^{N(s)-1}(x,t)\,|\frac{\partial u}{\partial x}|^2\cdot\lambda_s^2(t-\tau)\,dx\,dt.$$

Лемма 3. Предположим, что выполнены условия теоремы 2, тогда с постоянной $c^{(5)}$ выполнено неравенство

$$\int_{E_{r,\mu}} u^{m-1}(x,t)\,u_r^{m-1}(x,t)\,|\frac{\partial u}{\partial x}|^2\,dx\,dt \le c^{(5)}\mu^m\cdot k(1+k^{m-1})\,d^{n-2}. \tag{25}$$

Доказательство леммы 3 получается стандартными рассуждениями, подстановкой в интегральное тождество (8), функции

$$\psi(x,t) = u^m_{r,\mu,h}(x,t) - \frac{\mu^m}{(k-m_r)^m}\,u^m_{r,h}(x,t).$$

Лемма 4. Существует постоянная $c^{(6)}$, такая, что для решения задачи (2),(3),(6) выполнена оценка

$$I_{r,\mu}(s,\tau) \le c^{(6)}\{\frac{r^2}{s}I_{r,\mu}(2s,\tau)+\mu^{N(s)}\cdot s\,k\,d^{n-2}+\frac{\mu^{N(s)}}{s}\cdot\int_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\cdot\lambda_s(t-\tau)\,dx\,dt\}. \tag{26}$$

Доказательство леммы 4 получается путем постановки в интегральное тождество (8), функции

$$\psi(x,t) = u^{N(s)}_{r,\mu,h}(x,t) \cdot \lambda^2_s(t-\tau) - \frac{\mu^{N(s)}}{(k-m_r)^{N(s)}}\, u^{N(s)}_{r,h}(x,t)\, \lambda^2_s(t-\tau).$$

Лемма 5. Существует постоянная $c^{(7)}$, такая, что при $N(s) < q < N(s)+1$ и r, s, τ, удовлетворяющим неравенствам (13), справедлива оценка

$$\int_{F_{r,\mu}} u^{m-1}(x,t)\, u_r^{N(s)-q-1}(x,t)\, |\frac{\partial u}{\partial x}|^2 \cdot$$

$$\cdot \lambda^2_s(t-\tau)\, dx\, dt \le \frac{c^{(7)}}{(q-N(s))^2} \cdot \{\mu^{N(s)-q}\, k\, s\, d^{n-2} +$$

$$+ \frac{\mu^{(N(s)-q)\,\frac{m+N(s)}{m+N(s)-1}}}{r^{\frac{2}{m+N(s)}} \cdot s} \cdot \int_{F_{r,\mu}} |x|^{\frac{2}{m+N(s)}\,\frac{q}{m+N(s)-1}}\, u_r(x,t)\, \lambda_{2s}(t-\tau)\, dx\, dt\}. \quad (27)$$

Неравенство (27) получается при подстановке в интегральное тождество (8) функции

$$\psi(x,t) = \{\mu^{N(s)-q} - [u^{(\mu)}_{r,h}(x,t)]^{N(s)-q}\}\, \lambda^2_s(t-\tau) +$$

$$+ \{(k-m_r)^{N(s)-q} - \mu^{N(s)-q}\} \cdot \frac{1}{(k-m_r)^{N(s)}}\, u^{N(s)}_{r,h}(x,t)\, \lambda^2_s(t-\tau),$$

где $u^{(\mu)}_{r,h}(x,t) = \max\{u_{r,h}(x,t), \mu\}$.
Из лемм 3,4,5 следует

Теорема 4. *Существует постоянная K_5, такая, что для решения $v(x,t,k)$ задачи (2),(3),(6) при $q \in (N(s),\ N(s)+1)$, r, s, τ удовлетворяющих условиям (13), справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(s,\tau) \le K_5\, \{\frac{r^2}{s} I_{r,\mu}(s,\tau) + \frac{1}{(q-N(s))^2}[\mu^{N(s)}\, k\, s\, d^{n-2} +$$

$$+ \frac{\mu^{(N(s)-q)\,\frac{m+N(s)}{m+N(s)-1}+q}}{s^{1+\frac{1}{m+N(s)}}} \int_{F_{r,\mu}} |x|^{\frac{2}{m+N(s)}\,\frac{q}{m+N(s)-1}}\, \lambda^2_{2s}(t-\tau)\, dx\, dt]\}. \quad (28)$$

4. Предварительная поточечная оценка.

Лемма 6. С некоторой постоянной $c^{(8)}$ справедлива оценка

$$m_{\frac{r}{2}} - m_r \le c^{(8)}\, k\, (\frac{d^{n-2}}{r^n})^{\frac{1}{m}}, \quad r \in [8d, R]. \quad (29)$$

Доказательство. Определим при $j = 1, 2, \ldots$ числовые последовательности

$$r_{1,j} = \frac{r}{4}(1 + 2^{-j}), \quad r_{2,j} = \frac{r}{4}(3 - 2^{-j}),$$

$$t_{1,j} = \tau - \frac{s}{16} - (1 - 2^{1-2j})\, r^2, \quad t_{2,j} = \tau + \frac{s}{16} + (1 - 2^{1-2j})\, r^2$$

Далее $\psi_j(x)$ бесконечно дифференцируемая функция, равная единице на $\mathcal{D}_j = \{x : r_{1,j} \le |x| \le r_{2,j}\}$ нулю вне $\mathcal{D}_{j+1}$, $0 \le \psi(x) \le 1$, $|\frac{\partial \psi_j}{\partial x}| \le \frac{1}{r} 2^{j+4}$.
Определим также $\chi_j(t)$, равную единице при $t \in [t_{1,j}, t_{2,j}]$, нулю при $t \notin [t_{1,j+1}, t_{2,j+1}]$, $0 \le \chi_j(t) \le 1$, $|\frac{d}{dt}\chi_j(t)| \le \frac{2^{2j}}{r^2}$. Обозначим $\phi_j(x,t) = \psi_j(x)\chi_j(t)$

Подставим в (8) функцию

$$v(x,t) = u_{r,h}^{\alpha}(x,t)\,\phi_j^{\sigma}(x,t), \quad \alpha,\sigma > 0.$$

Имеем, после стандартных рассуждений

$$\operatorname*{vraimax}_{0\le t\le T}\int_{\Omega} u_r^{\alpha+1}(x,t)\,\phi_j^{\sigma}(x,t)\,dx + \alpha^2\int_{\Omega} u^{m-1}u_r^{\alpha-1}|\frac{\partial u}{\partial x}|^2\phi_j^{\sigma}\,dx\,dt \le$$

$$\le c_5\,\frac{\alpha^2\sigma^2}{r^2}\,2^{2j}\int_Q u_r^{\alpha+1}(x,t)\,\phi_j^{\sigma-2}(x,t)\,dx\,dt + c_5\cdot[k\,(\frac{d}{r})^{\frac{n-2}{m}}]^{\alpha+1}\,r^n. \qquad (30)$$

Используя вложение $V_2(Q)$ в $L_{2\frac{n+2}{n}}(Q)$, из (30), стандартными рассуждениями, (см. [1]), получим

$$\mu_j^{2m}(s,\tau) \le c_6\,(\frac{2^j}{r})^{n+2}\cdot\{\int_Q u_r^{2m}(x,t)\,\phi_j^2(x,t)\,dx\,dt + [k\,(\frac{d}{r})^{\frac{n-2}{m}}]^{2m}\,r^{n+2}\} \qquad (31)$$

здесь $\mu_j(s,\tau) = \operatorname*{vraimax}_{(x,t)\in G_j} u_r(x,t)$, $G_j = \{(x,t):\ x\in D_j,\ t\in[t_{1,j},t_{2,j}]\}$. Из (31), используя неравенство Пуанкаре и неравенство (25), получим

$$\mu_j^{2m}(s,\tau) \le c_7\,(\frac{2^j}{r})^{n+2}\,\{r^2\,\mu_{j+1}^m(s,\tau)\,k\,d^{n-2} + k^{2m}\,(\frac{d}{r})^{2(n-2)}\,r^{n+2}\} \qquad (32)$$

Из (32), полагая $\tilde\mu_j = \mu_j^m(s,\tau) + k^{2m-1}(\frac{d}{r})^{n-2}$, получим $\tilde\mu_j^2 \le c_8 2^{j(n+2)}\frac{k^m d^{n-2}}{r^n}\tilde\mu_{j+1}$, откуда последовательной итерацией по j, следует

$$\mu_1^m(s,\tau) \le c_9\cdot\frac{k^m\,d^{n-2}}{r^n},$$

доказывающее лемму 6.

Следствие 1. Для решения задачи (2),(3),(6) выполнена оценка

$$u(x,t) \le c^{(9)}\cdot k\,(\frac{T\,d^{n-2}}{|x|^n})^{\frac{1}{m}} \qquad (33)$$

5. Введем обозначение

$$R_{r,\mu}(s,\tau) = K\,s\,\mu^{N(s)}\,d^{n-2} + \mu^{(N(s)-q)\frac{m+N(s)}{m+N(s)-1}+q}\cdot(\frac{r^2}{s})^{\frac{1}{m+N(s)}}$$
$$\{K\,(\frac{k\,s\,d^{n-2}}{r^n})^{\frac{1}{m}}\}^{\frac{q}{m+N(s)-1}}\,r^n.$$

Теорема 5. *Существуют постоянные K_6, K_7, K_8 такие, что из справедливости при некоторых $r'\in[8d,R]$, $s'\in(0,T]$ оценок*

$$u(x,t) \le K_6\,k\,(\frac{s'\,d^{n-2}}{|x|^n})^{\frac{1}{m}},\ \ (x,t)\in Q,\ \ |x|\le r' \qquad (34)$$

$$I_{r,\mu}(s',\tau) \le R_{r,\mu}(K_7,s'), \qquad (35)$$

с произвольными $r\in[2d,r']$, $\mu\in(0,k-m_r)$, $\tau\in(0,T]$ и из неравенства

$$K_8\cdot(r')^2 \le s' \qquad (36)$$

следует выполнение оценок

$$u(x,t) \le K_6\,k\,(\frac{s''\,d^{n-2}}{|x|^n})^{\frac{1}{m}},\ \ (x,t)\in Q,\ \ |x|\le r'', \qquad (37)$$

$$I_{r,\mu}(s'',\tau) \le R_{r,\mu}(K_7,s''),\ \ r\in[2d,r''] \qquad (38)$$

при $s''=\frac{s'}{4}$, $r''=\frac{r'}{2}$ и тех же, что и в (35) значениях μ,τ.

Теорема 5 доказывается аналогично [1,3]. Теорема 2 является прямым следствием теоремы 5.

1. *Скрыпник И.В.* , Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач // М.: Наука, – 1990. – 448 с.
2. *Скрыпник И.В.* , Необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейного параболического уравнения // Мат. сб. – 1992. – **183**, – *N* 7. – С. 3–22.
3. *Скрыпник И.В.* , Поточечная оценка решения модельной нелинейной параболической задачи // Нелин. гр. задачи. – 1991. – *N 3*. – С. 72–85.